Лекция 7

Аналитични решения на уравнението на топлопроводността

1. Правоъгълна координатна система

Едномерна стационарна топлопроводност в декартова координатна система се използва за моделиране на температурното поле в плоски стени и пръти. В този случай уравнението на топлопроводността има вида (11.7):

$$\left(\frac{d^2T}{dr^2}\right) = 0 \,.$$

Граничните условия трябва да се зададат за двете гранични повърхнини на стената или пръта (фиг.11.3) : $\boldsymbol{T(0) = T_1}$; $\boldsymbol{T(L) = T_2}$

След двукратно интегриране на горното уравнение (11.7) се получава :

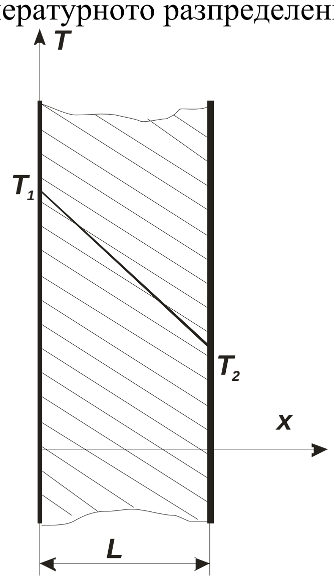
$$\boldsymbol{T(x) = C_1 x + C_2} \qquad (11.22)$$

Това уравнение представя температурното разпределение в стената (пръта). В него има две неопределени константи C_1 и C_2. Те се определят от граничните условия:

$$\boldsymbol{x = 0} \longrightarrow \boldsymbol{C_2 = T_1}$$

$$\boldsymbol{x = L} \longrightarrow \boldsymbol{T_2 = C_1 L + T_1} \longrightarrow C_1 = \frac{T_L - T_1}{L}$$

Температурното разпределение тогава приема вида :



Фиг.11.3 Плоска стена

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \;. \qquad (11.23)$$

Това е уравнение на права линия, което определя линейно разпределение на температурата в стената. Наклонът на линията на разпределение на температурата се определя от граничните повърхностни температури.

Топлинният поток се получава от уравнението на Фурие :

$$q = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

Определяйки производната на температурата от температурното разпределение и замествайки в горното равенство се получава:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} \longrightarrow \qquad q = -\lambda A \frac{T_1 - T_2}{L}$$

За нагледно представяне на топлинните явления може да се използва електротермична аналогия за стационарните топлинни процеси. Тя се обуславя от сходството на законите за съхранение и пренос на енергията при електрическите и топлинни явления. Сходните величини в случая са електрически ток и топлинен поток от една страна и температурна разлика и напрежение (потенциална разлика за електрическото поле) от друга. Следователно, изразът за топлинния поток е аналогичен на закона на Ом за електрическите вериги. Топлинният поток може да се запише във вида:

$$q = \frac{\lambda A}{L}(T_1 - T_2) \longrightarrow \qquad q = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \;,$$

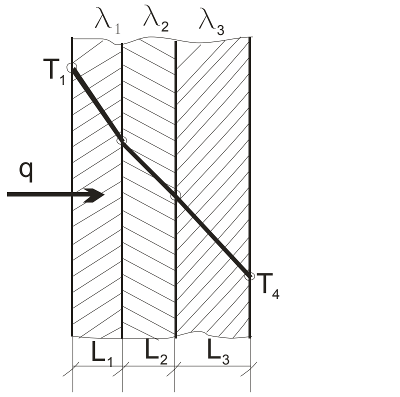
където $R_T = \dfrac{L}{\lambda A}$ е термично съпротивление.

Многослойна стена

Многослойните стени са съставени от отделни слоеве с различни топлофизични характеристики и дебелина (фиг. 11.4). Предполага се, че на граничните повърхности се подържат постоянни температури T_1 и T_4. На границата между слоевете се установяват температури T_2 и T_3. При стационарен процес (когато липсва акумулиране на топлина) топлинният поток е еднакъв за всичките слоеве. Той може да се запише за отделните слоеве както следва:

$$q = -\lambda_1 A \frac{T_1 - T_2}{L_1}; \qquad q = -\lambda_2 A \frac{T_2 - T_3}{L_2}; \qquad q = -\lambda_1 A \frac{T_3 - T_4}{L_3}$$

Ако се запишат изразите във вида:



$$\frac{qL_1}{\lambda_1 A} = T_1 - T_2; \qquad \frac{qL_2}{\lambda_2 A} = T_2 - T_3;$$

$$\frac{qL_3}{\lambda_3 A} = T_3 - T_4$$

и се извърши сумиране на левите и десните части на тези равенства се получава (след съкращение на температурите T_2 и T_3):

$$q\left(\frac{L_1}{\lambda_1 A} + \frac{L_2}{\lambda_2 A} + \frac{L_3}{\lambda_3 A}\right) = T_1 - T_4 \,.$$

Фиг.11.4 Многослойна стена

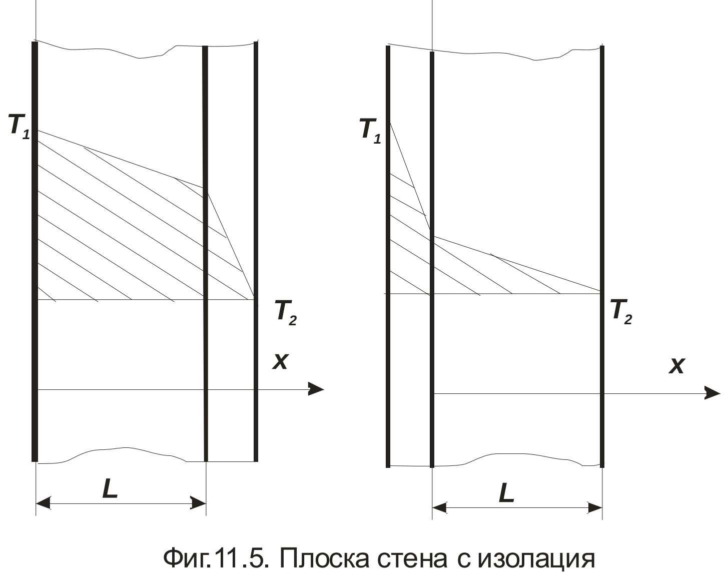
Окончателно за топлинния поток се получава:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{L_1}{\lambda_1 A} + \dfrac{L_2}{\lambda_2 A} + \dfrac{L_3}{\lambda_3 A}} \qquad (11.24)$$

Този израз показва, че в многослойните стени се реализира топлинен поток, който се определя от сумарното термично съпротивление на отделните слоеве. В този случай се реализира последователно свързване на термичните съпротивления: $R_m = \frac{L_1}{\lambda_1 A} + \frac{L_2}{\lambda_2 A} + \frac{L_3}{\lambda_3 A}$, където отделните събираеми са термичните съпротивления на отделните слоеве.

Температурното разпределение в многослойна стена представлява начупена линия (линейно разпределение). Наклонът на кривата в отделните слоеве е различен поради различното термично съпротивление. Както при електрическите вериги, най-голям температурен пад се получава в слоя с най-голямо термично съпротивление. Това означава, че в слоевете с голяма топлопроводност (малко термично съпротивление) се получава малък температурен пад, а в слоевете с ниска топлопроводност (изолационни слоеве) се реализира висок температурен пад. От тази гледна точка може да се анализира термичната ефективност на изолационните слоеве на стените на сградите. Съществен е въпросът за начина на монтиране на изолационните слоеве - от вътрешната или от външната страна е по-рационално разполагането й. Термичният анализ може да се обясни с помощта на схемата от фиг.11.5.

Дадени са две стени с основен (носещ) слой и изолационен слой. Лявата стена е с изолационен слой,



Фиг.11.5. Плоска стена с изолация

монтиран от външната страна (към ниската температура), а дясната стена е с изолация от вътрешната страна. Разпределението на температурата в стената е показано с начупената линия свързваща граничните температури. Както се вижда, основната носеща част на стената в първия случай има висока температура (топла стена), а във втория случай температурата е ниска (студена стена). Защрихованата площ в определен мащаб представя акумулираната в стената топлинна енергия. В стената с изолация монтирана от външната страна акумулираната енергия е доста по-голяма отколкото в студената стена. Това предопределя и приложението на двата вида изолиране на сградите.

Когато една сграда се обитава постоянно и няма рязка промяна на температурните условия в помещенията за препоръчване е изолацията да се разположи от външната страна на сградата. В този случай помещенията бавно се загряват (стените поглъщат голямо количество топлина), но веднъж достигнали дадени топлинни показатели те бавно променят тези показатели при промени във работата на отоплителната инсталация. Такава сграда се нарича термостабилна.

Когато една сграда се обитава периодично, за предпочитане е топлинните параметри в помещенията да се достигат за по-кратко време. Това означава, че по-подходящи в този случай са сградите с изолация разположена от вътрешната страна. При такава конструкция носещата част може да е значително по-малка и за топлофизичните качества от съществено значение е само изолационната част. В много случаи носещата конструкция е метална или дървена и такава сградата е известна като сграда с лека конструкция. В такава сграда е рационално да се използва модерна и добре регулируема отоплителна и климатична инсталация с която бързо да се достигат желаните параметри на микроклимата в помещенията. Такива сгради са много характерни за САЩ и Канада.

Трябва да се отбележи още една особеност на многослойните стени с разположена изолация от вътрешната страна. Това е необходимостта от защита на изолационния слой от кондензация на влага на границата с основната стена. Тъй като изолацията обикновено е паропропусклива, през нея прониква въздух от помещението, който съдържа водни пара (има определена влажност). При големия пад на температурата в изолационния слой, водните пари проникват в слоеве с ниска температура и може да се достигне температура при която влажният въздух започва да кондензира влага. В тези области се натрупва влага и там могат да се развият микроорганизми, а и качествата на самата изолация се нарушават. Затова в такива случаи трябва да се предвиди специална хидроизолация на стената.

Наклон на кривата на температурното разпределение се определя от термичното съпротивление

- **Топлопроводност при променлив коефициент на топлопроводността**

Коефициентът на топлопроводност λ не е постоянна величина и в много задачи се налага отчитане на изменението й. Обикновено λ зависи от температурата и уравнението на топлопроводимостта с отчитане на зависимостта на коефициента на топлопроводност от температурата ще има вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0 \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\lambda(T)\frac{dT}{dx}\right)=0 \qquad (11.25)$$

Разглежда се най-простия случай на зависимост на коефициента на топлопроводност от температурата – линейна зависимост:

$$\lambda=\lambda_0\left(1+\beta T\right)$$

където β е постоянна величина, а $\boldsymbol{\lambda_o}$ е коефициента на топлопроводност при температура $\boldsymbol{T=0}$.

При интегриране на уравнението на топлопроводността се получава:

$$\lambda(_T)\frac{dT}{dx} = C_1 \ ,$$

тъй като $q = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$, то $\boldsymbol{C_1 = -q}$

или $\lambda_0(1+\beta T)\dfrac{dT}{dx} = C_1$ и след още едно интегриране се получава:

$$\lambda_0\left(T + \frac{1}{2}\beta T^2\right) = C_1 x + C_2$$

За определяне на интеграционните константи се използват граничните условия:

$\boldsymbol{T(0) = T_1 \ ; \ T(L) = T_2}$

С отчитане на тези равенства за интеграционните константи се получава:

$$C_2 = \lambda_0\left(T_1 + \frac{\beta}{2}T_1^2\right) \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{\lambda_0}{L}\left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2}\left(T_2^2 - T_1^2\right)\right]$$

Топлинният поток в този случай е:

$$q = -C_1 = \frac{\lambda_0}{L}\left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2}\left(T_1^2 - T_2^2\right)\right]$$

$$q = \lambda_0\left(1 + \beta\frac{T_1 + T_2}{2}\right)\frac{T_1 - T_2}{L} \qquad (11.26)$$

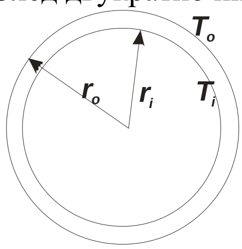
$$q = \lambda_m \frac{T_1 - T_2}{L}, \text{ където } \lambda_m = (1 + \beta\frac{T_1 + T_2}{L})$$

2. Цилиндрична координатна система

Едномерното стационарно уравнение се използва за определяне на топлинния поток и температурното разпределение в цилиндрични тела (тръби) – фиг. 11.6:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

След двукратно интегриране се получава:



Фиг.11.6 Цилиндрична стена

$$r\frac{dT}{dr} = C_1 \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \qquad (11.27)$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \qquad (11.28)$$

Това е температурното разпределение в радиално направление на цилиндричното тяло. Интеграционните константи се определят от граничните условия:

$\boldsymbol{T = T_i}$ при $\boldsymbol{r = r_i}$

$\boldsymbol{T = T_o}$ при $\boldsymbol{r = r_o}$

Тогава двете гранични температури могат да се изразят чрез (11.28) по-следния начин:

$$T_i = C_1 \ln r_i + C_2$$

$$T_o = C_1 \ln r_o + C_2$$

Ако се извърши почленно изваждане на двете равенства се получава:

$$T_i - T_o = C_1(\ln r_i - \ln r_o) \Rightarrow C_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln\dfrac{r_o}{r_i}}$$

След заместване на C_1 в равенството за една от граничните температури се определя константата C_2:

$$C_2 = T_i - \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \ln r_i$$

Тогава стационарното температурното разпределение в цилиндрично тяло има вида:

$$T(r) = \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \ln r + T_i - \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \ln r_i$$

или:

$$T(r) - T_i = \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \left(\ln r - \ln r_i \right) \qquad (11.29)$$

Понякога температурното разпределение се представя в безразмерен вид:

$$\frac{T(r) - T_i}{T_o - T_i} = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \qquad (11.30)$$

Топлинният поток се определя от закона на Фурие:

$$q = \lambda A(r) \frac{dT}{dr} = -\lambda (2\pi r l) \frac{dT}{dr}$$

където l е дължината на цилиндъра. Производната на температурата по радиуса се определя от (11.27)

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} = \left(T_o - T_i \right) \frac{1}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \frac{1}{r}$$ и за топлинния поток се получава:

$$q = 2 \lambda \pi l \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i} / \left(2 \pi \lambda l \right)} \qquad (11.31)$$

За въвеждане на електротермичната аналогия в случая на топлопроводност при цилиндрични тела термично съпротивление може да се дефинира по следния начин:

$$R_T = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2 \pi \lambda l} \qquad (11.32)$$

и топлинният поток се записва в стандартен вид:

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_T}$$

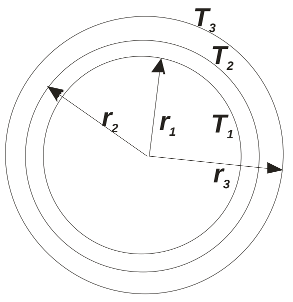
Специфичният топлинен поток (за 1m дължина от цилиндричното тяло) има вида:

$$q = 2 \lambda \pi \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i} / \left(2 \pi \lambda \right)} \qquad (11.33)$$

Специфичното термично съпротивление е:

$$R_T = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2 \pi \lambda} \qquad (11.34)$$

Многослойна цилиндрична стена



Фиг. 11.7 Многослойна цилиндрична стена

Многослойната цилиндрична стена съдържа няколко цилиндрични слоя с различни топлофизически характеристики (фиг. 11.7). За нея трябва да се зададат гранични условия за външната и вътрешната повърхнини T_1 и T_3 за да се определят интеграционните константи. Условията на границата между два слоя се задава чрез равенство на температурата (граничната температура за двата слоя). Тъй като се разглежда стационарна топлопроводност, топлинният поток през отделните слоеве в цилиндричното тяло е еднакъв (от закона за запазване на енергията). Следователно в сила са следните изрази:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1} / \left(2\pi\lambda\right)} \quad ; \qquad q = \frac{T_2 - T_3}{\ln \frac{r_3}{r_2} / \left(2\pi\lambda\right)}$$

След преобразуване на тези изрази се получава:

$$q \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot = \cdot T_1 - T_2 \qquad\qquad q \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot = \cdot T_1 - T_2$$

Ако съберем почленно двете страни на горните равенства и съкратим температурата T_2 се получава израз за топлинния поток:

$$q\left(\frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_3}{r_2}}\right) \cdot = \cdot T_1 - T_2$$

или

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1} / \left(2\pi\lambda\right) + \ln \frac{r_3}{r_2} / \left(2\pi\lambda\right)} \tag{11.35}$$

Термичното съпротивление на многослойната цилиндрична стена има вида:

$$R_T = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda}, \tag{11.36}$$

което представлява израз за определяне на общото съпротивление при последователно свързани термични съпротивления.

3. Сферична координатна система

Общото уравнение за сферична координатна система има вида (11.19). Стационарното едномерно уравнение при изменение на температурата по радиуса на сферата се записва като:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \cdot 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \cdot 0 \tag{11.37}$$

Еднократното интегриране дава следния израз:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \tag{11.38}$$

След преобразуване се получава израз, който може отново да се интегрира:

$$\frac{dT}{dr} = C_1 \frac{1}{r^2} \quad ; \qquad \int r^{-2} dr = -\frac{1}{r} \quad ; \qquad dT = C_1 \frac{1}{r^2} dr$$

Интегрирането дава температурното разпределение в сферичното тяло:

$$T = -C_1 \frac{1}{r} + C_2 \tag{11.39}$$

За определянето на интеграционните константи се използват граничните условия.

Гранични условия : $\begin{array}{l} r = r_i \Rightarrow T = T_1 \\ r = r_o \Rightarrow T = T_o \end{array}$

Температурата на граничните повърхнини може да се запише с общото температурно разпределение (11.39):

$$T_o = -C_1 \frac{1}{r_o} + C_2; \qquad \text{и} \qquad T_i = C_1 \frac{1}{r_i} + C_2$$

След почленно изваждане на двете равенства се получава:

$$T_o - T_i = C_1 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right)$$

Интеграционните константи са:

$$C_1 = \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \quad ; \qquad C_2 = T_o + \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \frac{1}{r_o}$$

Тогава температурното разпределение се задава от израза:

$$T = T_i + \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \frac{1}{r_o} - \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \frac{1}{r}$$

или: $$T = T_i + \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right) \tag{11.40}$$

Топлинният поток се определя от закона на Фурие:

$$Q = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr}$$

Производната на температурата се определя от (11.38)

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \frac{1}{r^2}$$

И за топлинния поток при сферични тела се получава следния израз:

$$Q = 4\pi\lambda \frac{T_o - T_i}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \qquad \text{или} \qquad Q = \frac{T_o - T_i}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right) / 4\pi\lambda} \tag{11.41}$$

където величината $R_T = \dfrac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{4\pi\lambda}$ се явява термично съпротивление при електротермичната аналогия.

Многослойна сферична стена:

Многослойните сферични стени представляват вложени един в друг сферични слоеве от материали с различни топлофизични характеристики. Термично те се анализират по аналогичен начин както плоски и цилиндрични стени. При стационарен режим топлинният поток е еднакъв за всички слоеве и може да се изрази както следва (пример за два слоя);

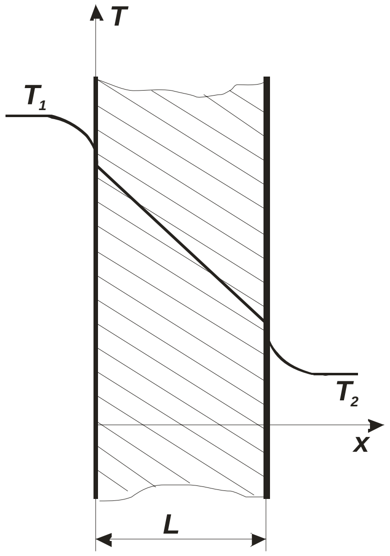
$$q = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)/4\pi\lambda} \quad \text{и} \quad q = \frac{T_2 - T_3}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)/4\pi\lambda}$$

Чрез преобразуване по аналогичен начин, както това беше направено при цилиндрична многослойна стена се получава:

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)/4\pi\lambda + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)/4\pi\lambda} \tag{11.42}$$

Топлопреминаване през плоска стена

Досега бяха разглеждани температурни полета и топлинни потоци през едномерни тела (стена, цилиндър и сфера) при гранични условия от първи род (фиксирани температури на повърхността). В практиката по-често се срещат случаи, при които вместо температурите на повърхнините $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$ са известни температурите на флуидите $\boldsymbol{T_{f1}}$ и $\boldsymbol{T_{f2}}$, които се намират, от двете страни на тялото. Този случай на пренасяне на топлина от един флуид към друг през твърда стена се нарича топлопреминаване. Между температурата на флуида и температурата на повърхността на стената има температурна разлика, която се обуславя от конвективния топлообмен между повърхността и флуида. Температурното разпределение в тази област не е линейно, а топлообменът се определя с помощта на коефициентите на конвективен топлообмен, които ще бъдат анализирани в следващия раздел.



Фиг.11.8 Топлопреминаване през плоска стена

На фиг.11.8 е изобразена плоска хомогенна и изотропна стена, която има дебелина $\boldsymbol{L}$ и коефициент на топлопроводност λ. Известни са коефициентът на топлопредаване на по-топлия флуид $\boldsymbol{\alpha_1}$ и неговата температура $\boldsymbol{T_{f1}}$, а също така за по-студения флуид съответно $\boldsymbol{\alpha_2}$ и $\boldsymbol{T_{f2}}$.

Температурно поле на стената се описва от познатото уравнение (11.22):

$$\boldsymbol{T = C_1 x + C_2}$$

Граничните условия за стени при които са известни температурите на флуида от двете страни се записват като уравнения за топлинния баланс на повърхността на стените:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dT}{dx} &= \alpha_1 (T_R - T_o) \Rightarrow x = 0 \\ \lambda \frac{dT}{dx} &= \alpha_2 (T_a - T_L) \Rightarrow x = L \end{aligned} \tag{11.43}$$

В тези уравнения в лявата част е записан топлинния поток от топлопроводност (закона на Фурие) от повърхността към вътрешността на стената, а в дясната част топлинния поток от конвективен топлообмен между повърхността на стената и флуида. Законът за запазване на енергията изиаскве тези два потока да са равни, когато процесът е стационарен.

В първото уравнение има знак минус тъй като, оста x е с посока обратна на нормалата към повърхността и за да се удовлетвори баланса на енергията трябва единият от елементите на баланса да има знак минус.

Използвайки температурното разпределение (11.22), температурата T_L може да се представи като:

$$T_L = C_1 L + C_2 \qquad (11.44)$$

След заместване на първата производна на температурата $\frac{dT}{dx} = C_1$ и температурата T_L от (11.44) в уравненията на граничните условия се получава:

$$-\lambda C_1 = \alpha_1 (T_R - C_2)$$

$$\lambda C_1 = \alpha_2 (T_a - C_1 L + C_2)$$

По-нататъшното преобразуване на граничните условия довежда до:

$$-\frac{\lambda}{\alpha_1} C_1 = T_R - C_2$$

$$\frac{\lambda}{\alpha_2} C_1 = (T_a - C_1 L + C_2)$$

След почленно събиране на двете равенства се получава:

$$\lambda\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) C_1 = (T_a - C_1 L - T_R) \quad \text{или} \quad \left(\lambda\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) + L\right) C_1 = T_a - T_R$$

От тези равенства се определят интеграционните константи:

$$C_1 = \frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}} \qquad C_2 = T_R + \frac{\lambda}{\alpha_1}\left(\frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}}\right)$$

Тогава разпределението на температурата е :

$$T = T_R - \frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}} x - \frac{\lambda}{\alpha_1} \frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}}$$ или след преобразуване:

$$T = T_R - \frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}} \left(\lambda + \frac{\lambda}{\alpha_1}\right) \qquad (11.45)$$

Топлинният поток се определя от закона на Фурие:

$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ където производната се явява константата C_1: $\frac{dT}{dx} = -\frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}}$

и за топлинния поток може да се запише:

$$q = \lambda \frac{T_a - T_R}{L + \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}} \qquad (11.46)$$

В практическите задачи често топлинният поток се записва във вида:

$$q = k(T_R - T_o), \qquad (11.47)$$

където $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ се нарича коефициент на топлопредаване.

Обратната величина на коефициента на топлопредаване се нарича обобщено термично съпротивление:

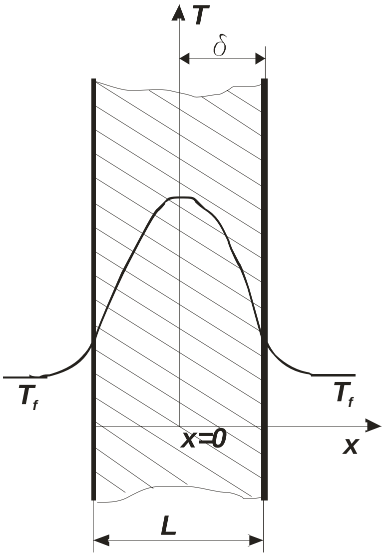
$$R_T = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\chi} + \frac{1}{\alpha_2} \tag{11.48}$$

Топлопроводност при наличие на вътрешен източник

Стационарното уравнение на топлопроводността с вътрешен източник е:

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\chi} = 0$$

Задачата може да се решава за различни по форма тела и различни координатни системи. Тук ще бъде анализиран случай на плоска стена. Разглежда се едномерна симетрична задача в декартова координатна система (фиг.11.9).



Фиг.11.9 Топлопреминаване с генериране на топлина

Могат да се използват следните гранични условия:

$$x = 0 \Rightarrow \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = 0 \tag{11.49}$$

- поради симетрията на процеса, топлинният поток през средното сечение (***x=0***) е нула, а той се определя от производната на температурата в това сечение.

Другото гранично условие се задава от конвективния топлообмен от повърхността на стената:

$$x = \delta \Rightarrow -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\delta} = \alpha\left(T_{CT} - T_f\right) \tag{11.50}$$

Уравнението на топлопроводността за плоска стена с генериране на топлина е:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \tag{11.51}$$

След еднократно интегриране се получава:

$$\frac{dT}{dx} + \frac{q_v}{\chi}x = C_1$$

Второто интегриране довежда до:

$$T + \frac{q_v}{\chi}\frac{x^2}{2} = C_1 x + C_2 \quad \text{или} \quad T = C_1 x + C_2 - \frac{q_v}{\chi}\frac{x^2}{2}$$

Интеграционните константи се определят с използване на граничните условия.

От първото гранично условие: $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} + \frac{q_v}{\lambda}x = C_1$ и $\frac{dT}{dx} = 0$, следва че $\boldsymbol{C_1 = 0}$.

От (11.51) може да се запише: $\frac{dT}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda}x$, и за $\boldsymbol{x = \delta} \rightarrow \left(\frac{dT}{dx}\right)_L = -\frac{q_v}{\lambda}\delta$

Тогава второто гранично условие е :

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\delta} = q_v\delta = \alpha\left(C_2 - \frac{q_v}{\lambda}\frac{\delta^2}{2} - T_f\right) \tag{11.52}$$

$C_2 = \frac{q_v\delta}{\alpha} + \frac{q_v\delta^2}{2\lambda} + T_f$ или за температурното разпределение се получава:

$$T = T_f + \frac{q_v\delta}{\alpha} + \frac{q_v\delta^2}{2\lambda}\left(1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right) \tag{11.53}$$

Това е параболично температурно разпределение, симетрично по отношение на средното сечение. То е показано графично на фигурата.
За топлинния поток, който е функция на координата $\boldsymbol{x}$ се получава:

$$q(x) = -\lambda A \frac{dT}{dx}; \frac{dT}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x \tag{11.54}$$

$$q(x) = q_v x$$

Топлинният поток на границата на стената е:

$$q_\delta = q(\delta)(2S) = q_v \delta 2S \tag{11.55}$$

Температурата на стената

$$q_\delta = \alpha\left(T_{CT} - T_f\right) \Rightarrow T_{CT} = T_f + \frac{q_\delta}{\alpha} \tag{11.56}$$